Rysunek 1: Moje zdjęcie

Twierdzenie 1. *Niech* $1 \leqslant a < b \leqslant n$, *gdzie* a *i* b *są początkowym i końcowym indeksem pewnego przedziału obserwowanych elementów. Przez* $p(r|a,b)$ *oznaczymy prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie* r *kandydatów w przedziale obserwacji* $x_{\pi(a)}, x_{\pi(a+1)} \dots x_{\pi(b)}$. *Wtedy*

$$p(r|a,b) = (1 + o(1))\frac{a}{b} \cdot \frac{\log^r \frac{b}{a}}{r!},$$

gdzie r *jest ustalone, a* $a = a(n)$ *i* $b = b(n)$ *są funkcjami takimi, że*
$\liminf a(n) > 0$ *oraz* $\liminf b(n) > 0$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem r.

1. $r = 0$. Na przedziale od a do b nie ma żadnych kandydatów, jeżeli największy z elementów wśród pierwszych b występuje przed momentem a. Oznacza to, że $p(0|a,b) = \frac{a}{b}$.

2. Załóżmy prawdziwość tezy dla r, tzn. $p(r|a,b) = (1 + o(1))\frac{a}{b} \cdot \frac{\log^r \frac{b}{a}}{r!}$.

3. Niech $a < k \leqslant b$. Element $x_{\pi(k)}$ jest ostatnim, $r + 1$ kandydatem w przedziale od a do b jeżeli:

   (a) jest największy wśród pierwszych b elementów;

   (b) wśród $x_{\pi(a+1)}, \dots, x_{\pi(k-1)}$ jest dokładnie r kandydatów.

   Prawdopodobieństwo pierwszego zdarzenia wynosi $\frac{1}{b}$, a drugiego, na mocy założenia indukcyjnego:

$$(1 + o(1))\frac{a}{k-1} \cdot \frac{\log^r \left(\frac{k-1}{a}\right)}{r!}.$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
p(r+1|a,b) &= (1+o(1)) \sum_{k=a+r+1}^{b} \frac{a}{b(k-1)} \frac{\log^r\left(\frac{k-1}{a}\right)}{r!} \\
&= (1+o(1)) \frac{1}{b} \int_{a+r}^{b} \frac{a}{x} \frac{\log^r\left(\frac{x}{a}\right)}{r!} dx.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Całkując przez części otrzymujemy, że

$$
p(r+1|a,b) = (1+o(1)) \frac{a}{b} \frac{\log^{r+1}\left(\frac{b}{a}\right)}{(r+1)!}.
$$

$\square$